

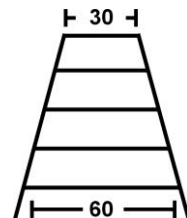
## Questões Complementares de Geometria

Professores Eustácio e José Ocimar

Resolução comentada – Outubro de 2009

### Questão 13\_Enem 2000

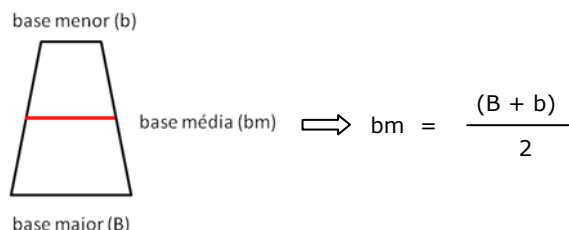
Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais baixo e o mais alto tenham larguras respectivamente iguais a 60 cm e a 30 cm, conforme mostra a figura. Os degraus serão obtidos cortando-se uma peça linear de madeira cujo comprimento mínimo, em cm, deve ser:



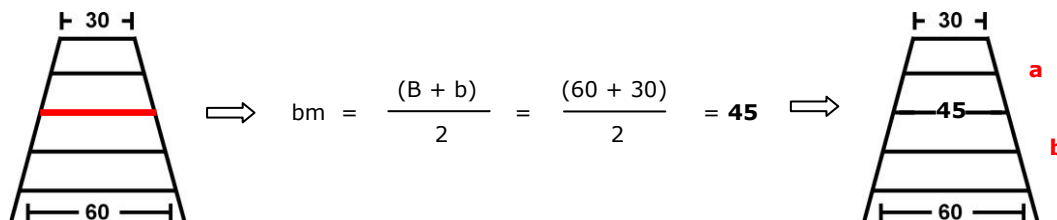
- (A) 144      (B) 180      (C) 210      **(D) 225**      (E) 240

### Solução:

Utilize a seguinte propriedade do trapézio: “a **base média** de um trapézio é igual a média aritmética simples das duas bases”, ou seja:



Observe que podemos aplicar a propriedade da base média três vezes consecutivas. Veja o destaque na figura original.



Utilizando o mesmo raciocínio, observem que o segmento “**a**” é a base média do trapézio de bases 30 e 45, assim sendo:

$$a = \frac{(45 + 30)}{2} = 37,5$$

Do mesmo modo, “**b**” também é uma base média (em relação a 60 e 45). Então:

$$b = \frac{(45 + 60)}{2} = 52,5$$

Enfim, encontramos todos os segmentos necessários (degraus) para confeccionar a escada: 30; 37,5; 45; 52,5 e 60. O comprimento mínimo é dado pela soma desses valores, portanto:

$$30 + 37,5 + 45 + 52,5 + 60 = 225 \text{ cm (ALTERNATIVA D)}$$

**Comentário:** A questão também pode ser resolvida utilizando o conhecimento de PA. No entanto, independente do modo de solução escolhido verifica-se que o conceito de média aritmética é fundamental para a resolução.

**Questão 02\_Enem 2001**

Um engenheiro, para calcular a área de uma cidade, copiou sua planta numa folha de papel de boa qualidade, recortou e pesou numa balança de precisão, obtendo 40 g. Em seguida, recortou do mesmo desenho, uma praça de dimensões reais 100 m x 100m, pesou o recorte na mesma balança e obteve 0,08g. Com esses dados foi possível dizer que a área da cidade, em metros quadrados, é de, aproximadamente,

- (A) 800
- (B) 10000
- (C) 320000
- (D) 400000
- (E) 5000000**



**Solução:**

Conhecendo a área da praça (100 X 100 = 10.000 m<sup>2</sup>), vamos utilizar uma regra de três simples e direta:

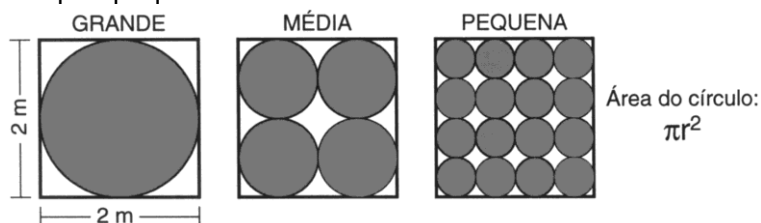
$$\begin{array}{l}
 10.000 \text{ m}^2 \longrightarrow 0,08 \text{ g} \\
 x \qquad \qquad \qquad \longrightarrow 40 \text{ g}
 \end{array}
 \quad \Rightarrow \quad
 0,08x = 10.000 \times 40 \quad \Rightarrow \quad \frac{8x}{100} = 10.000 \times 40$$

$$\Rightarrow 8x = 100 \times 10.000 \times 40 \quad \Rightarrow \quad x = 5.000.000 \text{ m}^2 \quad (\text{ALTERNATIVA E})$$

**Comentário:** Ao transformar o número 0,08 em uma fração centesimal, o cálculo ficou mais simples. Também há a necessidade de estar atento no caso de a regra de três ser **inversa**, cujo cálculo é diferente do realizado.

**Questão 15\_Enem 2004**

Uma empresa produz tampas circulares de alumínio para tanques cilíndricos a partir de chapas quadradas de 2 metros de lado, conforme a figura. Para 1 tampa grande, a empresa produz 4 tampas médias e 16 tampas pequenas.



As sobras de material da produção diária das tampas grandes, médias e pequenas dessa empresa são doadas, respectivamente, a três entidades: I, II e III, para efetuarem reciclagem do material. A partir dessas informações, pode-se concluir que

- (A) a entidade I recebe mais material do que a entidade II.
- (B) a entidade I recebe metade de material do que a entidade III.
- (C) a entidade II recebe o dobro de material do que a entidade III.
- (D) as entidade I e II recebem, juntas, menos material do que a entidade III.
- (E) as três entidades recebem iguais quantidades de material.**

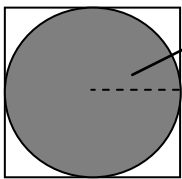
**Solução:**

Inicialmente verificamos que área do quadrado é igual nos três casos:  $2 \times 2 = 4 \text{ m}^2$ .

Como o exercício envolve o número  $\pi$ , orientamos a deixar para substituir o seu valor apenas no final, lembrando que na maioria dos casos esse valor pode ser arredondado para 3, facilitando muito os cálculos. Nessa questão, para encontrar as sobras, devemos subtrair a área do quadrado da(s) área(s) do(s) círculo(s), ficando atento ao fato de que na figura 2 temos 4 círculos e, na figura 3, temos 16 círculos.

Vamos aos cálculos:

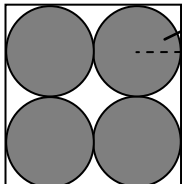
**Tampa grande**



$$r = 1$$

$$\Rightarrow A_{\text{quad}} - A_{\text{círc}} = 4 - \pi \cdot 1^2 = 4 - \pi$$

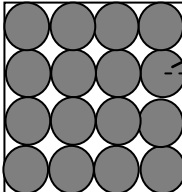
**Tampa média**



$$r = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A_{\text{quad}} - 4 \cdot A_{\text{círc}} = 4 - 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 - \cancel{4} \cdot \pi \cdot \frac{1}{\cancel{4}} = 4 - \pi$$

**Tampa pequena**



$$r = \frac{1}{4}$$

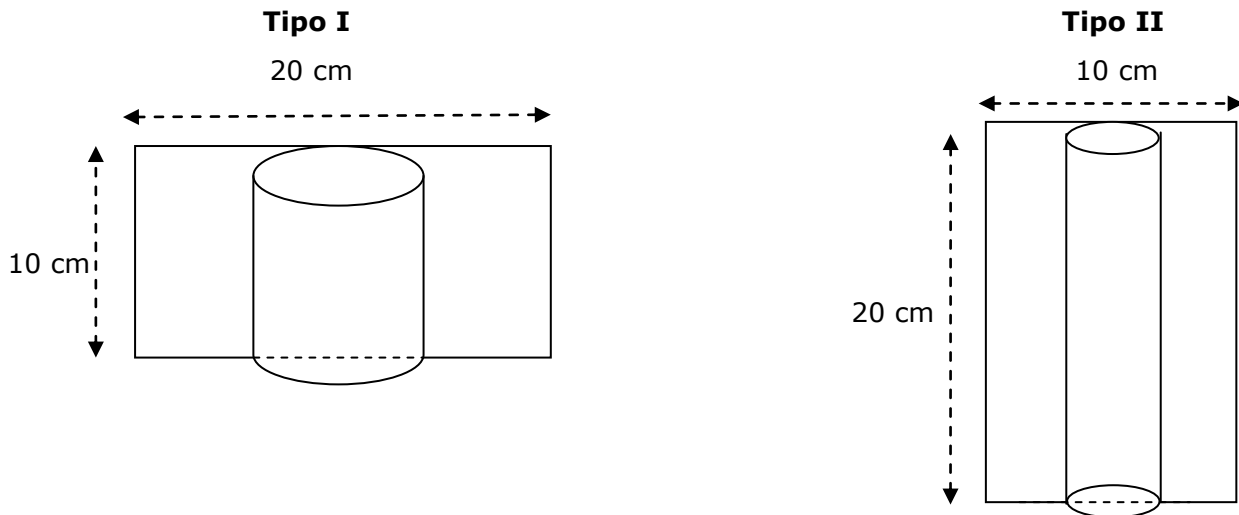
$$\Rightarrow A_{\text{quad}} - 16 \cdot A_{\text{círc}} = 4 - 16 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 4 - \cancel{16} \cdot \pi \cdot \frac{1}{\cancel{16}} = 4 - \pi$$

Conclui-se que as três entidades recebem iguais quantidades de material. (**ALTERNATIVA E**)

**Comentário:** Questão extremamente inteligente. Fugindo do valor usual para  $\pi$  (3,14), o aluno pode trabalhar com frações e chegar ao resultado sem muitas dificuldades.

**Questão 59\_Enem 2006**

Uma artesã confecciona dois diferentes tipos de vela ornamental a partir de moldes feitos com cartões de papel retangulares de 20 cm X 10 cm (conforme ilustram as figuras abaixo). Unindo dois lados opostos do cartão, de duas maneiras, a artesã forma cilindros e, em seguida, os preenche completamente com parafina.



Supondo-se que o custo da vela seja diretamente proporcional ao volume da parafina empregado, o custo da vela do tipo I, em relação ao custo da vela de tipo II será:

- (A) O triplo      **(B) O dobro**      (C) igual      (D) A metade      (E) A terça parte

**Solução:**

Inicialmente devemos perceber que ao “desenrolar” e abrir o cilindro, obtemos o comprimento da circunferência, cuja fórmula é dada por  $C = 2\pi r$ . Novamente optaremos em manter  $\pi$  sem substituir pelo seu valor. Para achar a área do círculo e também o volume de cada cilindro, precisaremos do raio. Desse modo, dois cálculos serão fundamentais: um para determinar o raio (usando a fórmula do comprimento total) e o outro para calcular o volume (usando a expressão que determina o volume do cilindro  $\pi r^2 \cdot h$ ).

**Tipo I**

$$\text{Comprimento} = 20 \text{ cm} \implies 2\pi r = 20 \text{ cm} \implies r = \frac{10}{\pi} \text{ cm}$$

$$\text{Assim, o volume do primeiro cilindro será: } V_1 = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot \left(\frac{10}{\pi}\right)^2 \cdot 10 \rightarrow V_1 = \pi \cdot \frac{100}{\pi^2} \cdot 10 \rightarrow V_1 = \frac{1.000}{\pi}$$

De forma análoga, realizaremos o cálculo para o segundo cilindro:

**Tipo II**

$$\text{Comprimento} = 10 \text{ cm} \implies 2\pi r = 10 \text{ cm} \implies r = \frac{5}{\pi} \text{ cm}$$

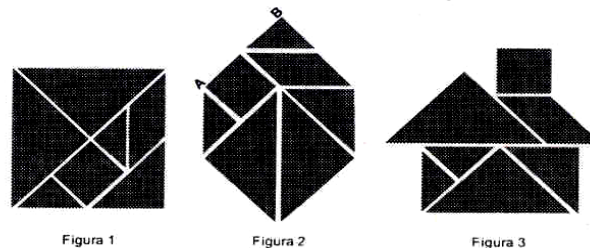
$$\text{Assim, o volume do primeiro cilindro será: } V_2 = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot \left(\frac{5}{\pi}\right)^2 \cdot 20 \rightarrow V_2 = \pi \cdot \frac{25}{\pi^2} \cdot 20 \rightarrow V_2 = \frac{500}{\pi}$$

Desse modo, como o valor é diretamente proporcional, o custo para produzir a vela de tipo I é o dobro do custo para produzir a vela tipo II. **(ALTERNATIVA B)**

**Comentário:** Questão muito interessante. O aluno deve estar atento ao fato de que, como a fórmula do volume possui o raio ao quadrado, quando temos  $r = 10$  e  $r = 20$  os resultados são diferentes, ou seja, a questão usa os mesmos valores numéricos, mas, posicionados em locais diferentes da fórmula, produzem resultados significativamente distintos. No caso, o dobro. Manter o  $\pi$  inalterado foi opção nossa. Se você substituir o valor por 3 chegara à mesma conclusão. Outro fato que não pode passar despercebido é a expressão "diretamente proporcional" que garante o aumento na mesma proporção. Se o enunciado trouxesse o termo "inversamente proporcional" a resposta deveria ser **a metade** e não o dobro. Muita atenção a isso!

### Questão 21\_Enem 2008

O *tangram* é um jogo oriental antigo, uma espécie de quebra cabeça constituído de sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Essas peças são obtidas recortando-se um quadrado de acordo com o esquema da figura 1. Utilizando-se todas as sete peças é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas figuras 2 e 3.



Se o lado AB do hexágono mostrado na figura 2 mede 2cm, então a área da figura 3, que representa uma "casi

- (A)  $4 \text{ cm}^2$       **(B)  $8 \text{ cm}^2$**       (C)  $12 \text{ cm}^2$       (D)  $14 \text{ cm}^2$       (E)  $16 \text{ cm}^2$

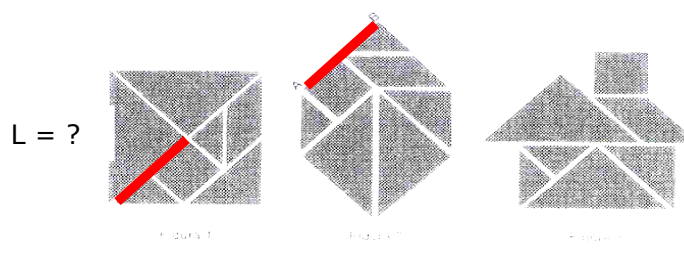
#### Solução:

A figura que possui a fórmula mais simples para o cálculo da área é o quadrado. Portanto, basta sabermos a área do quadrado que o problema estará resolvido (figura 1). Por quê? Ora, como o TANGRAM possui as mesmas peças não importa de que forma as coloquemos (casinha, pato, losango, hexágono etc) que a área final sempre será a mesma.

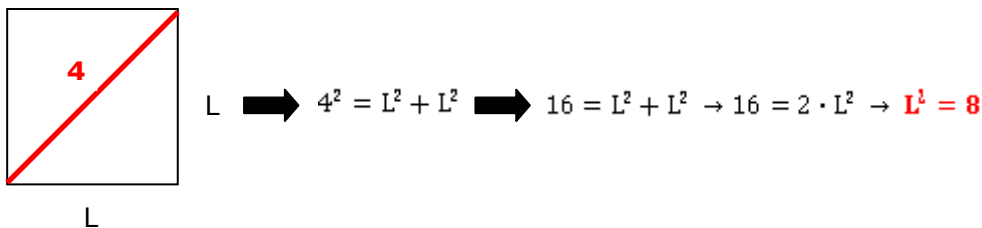
Assim, teremos que ter habilidade para determinar o lado do quadrado e concluir a questão.

Com atenção, é possível verificar que o lado  $AB = 2 \text{ cm}$  (em vermelho no hexágono abaixo) é igual a metade da diagonal do quadrado, ou seja, a diagonal do quadrado (fig 1) mede  $4 \text{ cm}$ .

Vejam:



Assim, usando o Teorema de Pitágoras:



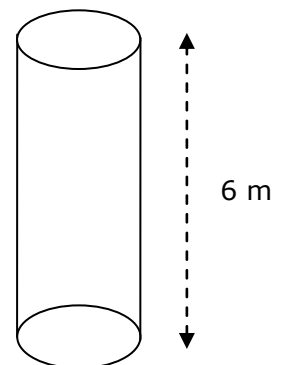
Ora,  $L^2 = 8$  já é a área do quadrado. Desse modo,  $8\text{cm}^2$  é a área das figuras 1, 2 e 3 e, com isso, o resultado da questão. (**ALTERNATIVA B**).

**Comentário:** Excelente questão, envolvendo o conceito de área e percepção do aluno frente ao desafio. Tentar achar a área do hexágono (uma vez que o lado AB foi dado) é um caminho possível, porém mais difícil (o hexágono não é regular). Por isso optamos por resolver a questão usando a área e a diagonal do quadrado.

### Questão 56\_Enem 2008

A figura ilustra um reservatório de água na forma de um cilindro circular reto, com 6m de altura. Quando está completamente cheio, o reservatório é suficiente para abastecer, por um dia, 900 casas cujo consumo médio diário é de 500 litros de água. Suponha que, um certo dia, após uma campanha de conscientização sobre o uso da água, os moradores das 900 casas abastecidas por esse reservatório tenham feito economia de 10% no consumo de água. Nessa situação:

- (A) A quantidade de água economizada foi de  $4,5\text{ m}^3$ .
- (B) A altura do nível da água que sobrou no reservatório, ao final do dia, foi igual a 60cm.**
- (C) A quantidade de água economizada seria suficiente para abastecer, no máximo, 90 casas cujo consumo diário fosse 450 litros.
- (D) Os moradores dessas casas economizariam mais de R\$ 200,00 se o custo de  $1\text{ m}^3$  de água para o consumidor fosse igual a R\$ 2,50.
- (E) Um reservatório de mesma forma e altura, mas com o raio da base 10% menor que o representado teria água suficiente para abastecer todas as casas.



É importante notar que ao informar o consumo de cada casa e a quantidade de casas o problema nos dá, implicitamente, a capacidade (volume) do reservatório cheio e também após os 10% de consumo de cada casa.

Temos que, após a conscientização, cada casa economizou 10% de 500 L, ou seja, cada residência passou a utilizar 450 L/dia.

O volume inicial do reservatório é igual a  $900 \times 500\text{ L} = 450.000\text{L}$ , e o volume após a economia é igual a  $900 \times 450\text{ L} = 405.000\text{L}$ .

Ora, conhecendo os dois volumes e sabendo que a área da base do reservatório é constante, utilizaremos uma regra de três simples e direta para verificar o quanto baixou o nível da água no reservatório.

Veja:

$$(\text{área da base}) \cdot h_1 \rightarrow 450.000L \quad (\text{volume inicial})$$

$$(\text{área da base}) \cdot h_2 \rightarrow 405.000L \quad (\text{volume após consumo})$$

Segue que:

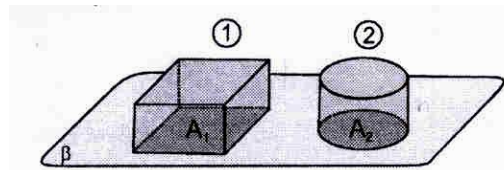
$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{450.000}{405.000} \rightarrow \frac{6}{h_2} = \frac{10}{9} \rightarrow 10h_2 = 54 \therefore h_2 = 5,4\text{m}$$

Como a altura inicial era de 6m e após o consumo baixou o equivalente a 5,4 m, temos que sobrou no reservatório  $6 - 5,4 = 0,6$  m, ou seja, **60cm**. (**ALTERNATIVA B**)

**Comentário:** Questão complexa quanto ao entendimento, mesmo considerando a resolução simples (regra de três). O aluno, ao ler as alternativas, provavelmente ficaria confuso com o caminho a seguir. Essa questão exige experiência e associação com outras questões já resolvidas, ou seja, muito estudo e conhecimento. Note que não foi necessária a utilização da fórmula da área da base uma vez que haveria o cancelamento.

### Questão 12\_Enem 2009

Em uma padaria, há dois tipos de forma de bolo, formas 1 e 2, conforme mostra a figura:



Sejam  $L$  o lado da base da forma quadrada,  $r$  o raio da base da forma redonda,  $A_1$  e  $A_2$  as áreas das bases das formas 1 e 2,  $V_1$  e  $V_2$  os seus volumes, respectivamente. Se as formas tem a mesma altura  $h$ , para que elas comportem a mesma quantidade de massa de bolo, qual é a relação entre  $r$  e  $L$ ?

- (A)  $L = r$                       (B)  $L = 2r$                       (c)  $L = r$                       **(D)  $L = r \cdot \sqrt{\pi}$**                       (E)  $L = \frac{\pi \cdot r^2}{2}$

#### **Solução:**

Para que comportem a mesma quantidade de massa de bolo, é necessário que os volumes sejam iguais. Denotando por  $L$  o lado do quadrado da base do prisma e por  $r$  o raio da base do cilindro, devemos ter:

$$V_1 = V_2$$

$$A_{\text{quadrado}} \cdot h = A_{\text{círculo}} \cdot h \quad (\text{mesma altura})$$

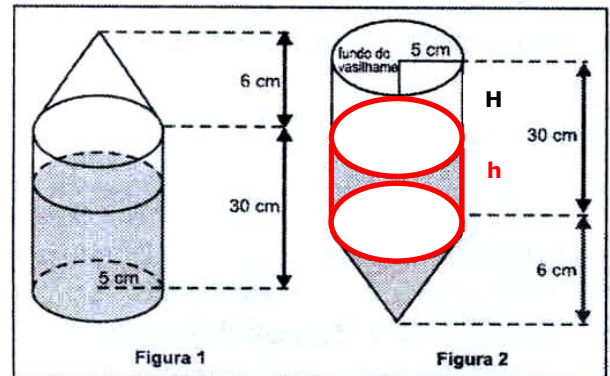
$$L^2 = \pi r^2$$

$$L = \sqrt{\pi r^2} \rightarrow L = r\sqrt{\pi} \quad (\text{ALTERNATIVA D})$$

**Comentário:** Questão hábil e simples que verifica o real entendimento sobre volume e, também, verifica a habilidade que o aluno possui com operações envolvendo radicais. No nosso entendimento deveria ser anulada, uma vez que apresentou duas alternativas iguais.

**Questão 32\_Enem 2009**

Um vasilhame na forma de um cilindro circular reto de raio da base de 5cm e altura de 30 cm está parcialmente ocupado por  $625\pi \text{ cm}^3$  de álcool. Suponha que sobre o vasilhame seja fixado um funil na forma de um cone circular reto de raio da base de 5cm e altura de 6cm, conforme ilustra a figura 1. O conjunto, como mostra a figura 2, é virado para baixo, sendo H a distância da superfície do álcool até o fundo do vasilhame.



Volume do cone:  $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

Considerando-se essas informações, qual é o valor da distância H?

- (A) 5 cm      **(B) 7 cm**      (C) 8 cm      (D) 12 cm      (E) 18 cm

**Solução:**

Como conhecemos o volume de álcool no recipiente ( $625\pi \text{ cm}^3$ ), precisamos saber o volume que conterà o cone. Por quê? Para obtermos, na figura 2, o volume restante (cilindro vermelho). Estamos seguindo o seguinte raciocínio: Sabendo o volume do cilindro vermelho e conhecendo a sua área da base (pois o raio foi dado), basta determinar a altura  $h$ . O que o problema quer "a altura H, distância da superfície do álcool até o fundo do vasilhame" nada mais é do que a altura do cilindro vazio (que não contém álcool), ou seja:  $H = 30 - h$ .

Vamos aos cálculos.

$$V_{\text{cone}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 6}{3} = 50\pi$$

Assim,  $625\pi - 50\pi = 575\pi$  é o volume do cilindro em destaque vermelho.

Com essa informação e sabendo a fórmula para determinar o volume do cilindro, determinaremos a altura  $h$ .

Assim, temos:

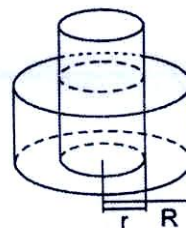
$$\cancel{\pi} \cdot r^2 \cdot h = 575\cancel{\pi} \quad \Rightarrow \quad 5^2 \cdot h = 575 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{575}{25} = 23 \text{ cm.}$$

Desse modo, verificamos que  $H = 30 - 23 = 7\text{cm}$  (**ALTERNATIVA B**)

**Comentário:** Os cálculos algébricos foram simples, entretanto a questão exigiu habilidade de leitura e interpretação/entendimento.

**Questão 39\_Enem 2009**

Em uma praça pública, há uma fonte que é formada por dois cilindros, um de raio  $r$  e altura  $h_1$ , e o outro de raio  $R$  e altura  $h_2$ . O cilindro do meio enche e, após transbordar, começa a encher o outro. Se  $R = r\sqrt{2}$  e  $h_2 = \frac{h_1}{3}$ , e para encher o cilindro do meio foram necessários 30 minutos, então, para se conseguir encher essa fonte e o segundo cilindro, de modo que fique completamente cheio, serão necessários:



- (A) 20 min      (B) 30 min      **(C) 40 min**      (D) 50 min      (E) 60 min

**Solução:**

Para cálculo do volume do cilindro utilizamos

$$V = \text{Área da base} \times \text{altura}$$

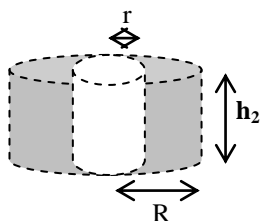
Como se trata de uma base circular teremos:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

O volume ( $V_1$ ) do cilindro do meio tem raio  $r$  e altura  $h_1$ , seu volume será:

$$V_1 = \pi \cdot r^2 \cdot h_1$$

O volume ( $V_2$ ) do cilindro de fora, conforme podemos observar na ilustração abaixo possui raio  $(R - r)$  e altura  $h_2$ .



O volume ( $V_2$ ) será:

$$V_2 = \pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot h_2$$

Temos ainda que

$$R = r\sqrt{2}$$

e

$$h_2 = \frac{h_1}{3}$$

Substituindo esses valores na expressão de  $V_2$  teremos:

$$V_2 = \pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot h_2$$

$$V_2 = \pi \cdot (2r^2 - r^2) \cdot \frac{h_1}{3}$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h_1$$

Comparando as expressões para os volumes  $V_1$  e  $V_2$  observamos que:

$$V_2 = \frac{1}{3} V_1$$

O volume do cilindro de fora corresponde a  $1/3$  do volume do cilindro do meio.

Foi fornecido que o cilindro do meio ( $V_1$ ) gasta 30 min para encher. Como  $V_2$  é  $1/3$  de  $V_1$  teremos que para enchê-lo será gasto  $1/3$  do tempo necessário para encher o volume do cilindro do meio, que equivale a 10min. Então para encher toda a fonte teremos:

Tempo total = tempo para encher o cilindro do meio + tempo para encher o cilindro de fora  
 Tempo total = 30 min + 10 min = 40 min (**ALTERNATIVA C**)

**Comentário:** Note que a questão foi resolvida utilizando apenas a expressão que determina o volume de um cilindro. O aluno que possui dificuldade no trabalho com números irracionais e frações poderia apresentar dificuldades.

### Questão 42\_ Enem 2009

Um artista plástico construiu, com certa quantidade de massa modeladora, um cilindro circular reto cujo diâmetro da base mede 24 cm e cuja altura mede 15 cm. Antes que a massa secasse, ele resolveu transformar aquele cilindro em uma esfera.

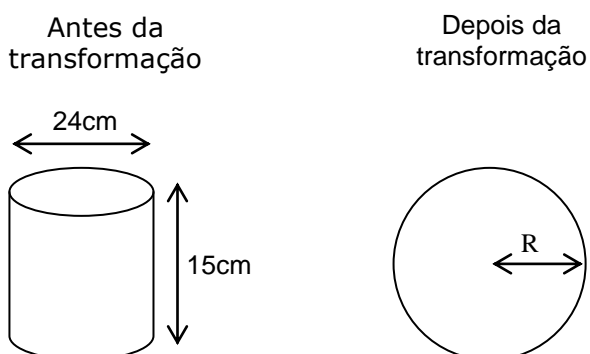
Volume da esfera:  $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ .

Analisando as características das figuras geométricas envolvidas, conclui-se que o raio  $R$  da esfera assim construída é igual a:

- (A) 15                      (B) 12                      (C) 24                      **(D)  $3\sqrt[3]{60}$**                       (E)  $6\sqrt[3]{30}$

### Solução:

Temos a seguinte configuração:



Observe que ao transformar o cilindro em uma esfera, o artista utilizou a mesma massa. Desse modo temos que o volume do cilindro é igual ao volume da esfera:

$$V_{\text{cilindro}} = V_{\text{esfera}}$$

Ou seja:

$$\pi.r^2.h = \frac{4}{3}.\pi.r^3$$

$$\text{Onde } r_{\text{cilindro}} = \frac{24}{2} = 12\text{cm}$$

$$h = 15\text{cm}$$

$$r_{\text{esfera}} = R$$

Teremos então:

$$\pi.(12)^2.15 = \frac{4}{3}.\pi.R^3$$

$$144 \times 15 = \frac{4}{3}R^3$$

$$2.160 \times 3 = 4R^3$$

$$\frac{6480}{4} = R^3$$

$$R^3 = 1620$$

$$R = \sqrt[3]{1620}$$

$$R = 3.\sqrt[3]{60}$$

**(ALTERNATIVA D)**

**Comentário:** A questão trabalhou muito bem o conceito de volume com razoável grau de dificuldade de interpretação. Como qualidade extra, o aluno deveria mostrar como decompor radicais com expoentes diferentes de 2.